Sous-décalages de type fini apériodiques sur les groupes de Baumslag-Solitar généralisés

Nathalie Aubrun

(CNRS, Univ. Paris-Saclay, LISN)

Rencontre Equivalence orbitale – Besse-en-Chandesse

Lundi 8 juillet 2024

Partie I : Sous-décalages de type fini et apériodicité

Objectifs

- Constructions classiques sur $\mathbb{Z}^2$
- Obstructions et résultats sur des groupes
- Conjecture : caractérisation des groupes avec SFT apériodiques

Sous-décalages et apériodicité

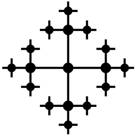
Espace des configurations

- A alphabet fini, G groupe de type fini.

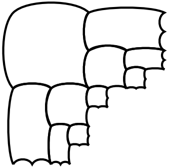
Espace des configurations

- A alphabet fini, G groupe de type fini.

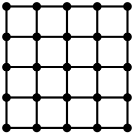
$\langle a, b \mid \varnothing \rangle$

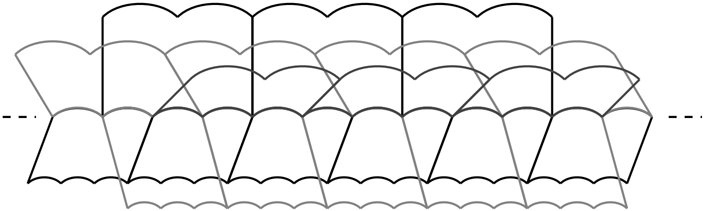


$\langle a, b \mid ab^2 = ba^2 \rangle$



$\langle a, b \mid ab = ba \rangle$

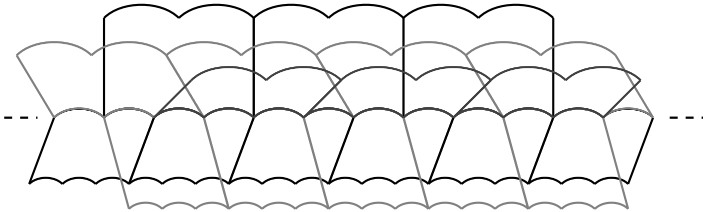




$\langle a, b \mid a^2 b = ba^3 \rangle$

Espace des configurations

- A alphabet fini, G groupe de type fini.
- A^G: espace des **configurations**, **compact**.

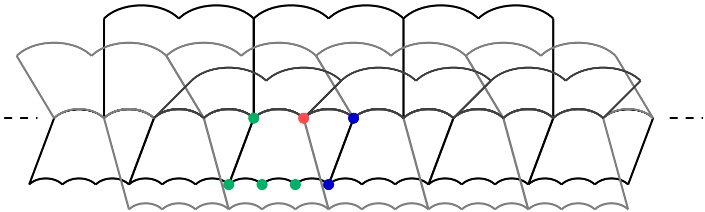


Espace des configurations

- A alphabet fini, G groupe de type fini.
- A^G: espace des **configurations**, **compact**.
- action (à gauche) de G sur A^G par **translation** :

$$\sigma : \begin{pmatrix} G \times A^G & \to & A^G \\ (g, x) & \mapsto & \sigma_g(x) \end{pmatrix}$$

avec $(\sigma_g(x))_h = x_{g^{-1}.h}$ pour tout $h \in G$

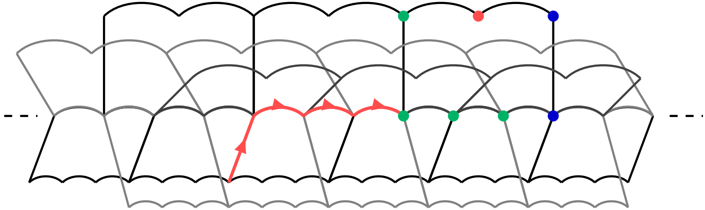


Espace des configurations

- A alphabet fini, G groupe de type fini.
- A^G: espace des **configurations**, **compact**.
- action (à gauche) de G sur A^G par **translation** :

$$\sigma : \left(\begin{array}{ccc} G \times A^G & \to & A^G \\ (g, x) & \mapsto & \sigma_g(x) \end{array} \right)$$

avec $(\sigma_g(x))_h = x_{g^{-1}.h}$ pour tout $h \in G$



Sous-décalages

- (A^G, σ) est un système dynamique, le **décalage plein**

Sous-décalages

- $\left(A^G, \sigma\right)$ est un système dynamique, le **décalage plein**

- un **sous-décalage** est un sous-système de $\left(A^G, \sigma\right)$:

$$\left(X \subset A^G, \sigma\right)$$

  où l'ensemble de configurations X est fermé et stable par σ.

Sous-décalages

- $\left(A^G, \sigma\right)$ est un système dynamique, le **décalage plein**
- un **sous-décalage** est un sous-système de $\left(A^G, \sigma\right)$:

$$\left(X \subset A^G, \sigma\right)$$

où l'ensemble de configurations X est fermé et stable par σ.

Exemples :

$$X_{\text{square free}} := \left\{x \in A^{\mathbb{Z}} \mid x \text{ n'a pas de facteur carré}\right\} \ (\text{avec } |A| \geq 3)$$

$$X_{\text{square free}^{\uparrow}} := \left\{x \in A^{\mathbb{Z}^2} \mid \forall i \in \mathbb{Z},\ x_{|\mathbb{Z}\times\{i\}} \in X_{\text{square free}}\right\} \ (\text{avec } |A| \geq 3)$$

$$X_{\leq 1} := \left\{x \in \{0,1\}^G \mid \sharp\{g \in G \mid x_g = 1\} \leq 1\right\}$$

Deux notions d'apériodicité

- Le **stabilisateur** de $x \in A^G$ est $Stab(x) := \{g \in G \mid \sigma_g(x) = x\}$.
- Une configuration est **apériodique** si son stabilisateur est trivial.
- Un sous-décalage est **apériodique** si toutes ses configurations le sont.

Deux notions d'apériodicité

- Le **stabilisateur** de $x \in A^G$ est $Stab(x) := \{g \in G \mid \sigma_g(x) = x\}$.
- Une configuration est **apériodique** si son stabilisateur est trivial.
- Un sous-décalage est **apériodique** si toutes ses configurations le sont.

Exemples :

$X_{\text{square free}}$ est apériodique ; $X_{\text{square free}^{\uparrow}}$ et $X_{\leq 1}$ ne le sont pas

Deux notions d'apériodicité

- Le **stabilisateur** de $x \in A^G$ est $Stab(x) := \{g \in G \mid \sigma_g(x) = x\}$.
- Une configuration est **apériodique** si son stabilisateur est trivial.
- Un sous-décalage est **apériodique** si toutes ses configurations le sont.

Exemples :
$X_{\text{square free}}$ est apériodique ; $X_{\text{square free}^{\uparrow}}$ et $X_{\leq 1}$ ne le sont pas

Autre notion :

- L'**orbite** de $x \in A^G$ est $Orb(x) := \{\sigma_g(x) \mid g \in G\}$.
- Une configuration est **faiblement apériodique** si son orbite est infinie.
- Un sous-décalage est **faiblement apériodique** si toutes ses configurations le sont.

Deux notions d'apériodicité

- Le **stabilisateur** de $x \in A^G$ est $Stab(x) := \{g \in G \mid \sigma_g(x) = x\}$.
- Une configuration est **apériodique** si son stabilisateur est trivial.
- Un sous-décalage est **apériodique** si toutes ses configurations le sont.

Exemples :
$X_{\text{square free}}$ est apériodique ; $X_{\text{square free}^{\uparrow}}$ et $X_{\leq 1}$ ne le sont pas

Autre notion :

- L'**orbite** de $x \in A^G$ est $Orb(x) := \{\sigma_g(x) \mid g \in G\}$.
- Une configuration est **faiblement apériodique** si son orbite est infinie.
- Un sous-décalage est **faiblement apériodique** si toutes ses configurations le sont.

Exemples :
$X_{\text{square free}}$ et $X_{\text{square free}^{\uparrow}}$ sont faiblement apériodiques ; $X_{\leq 1}$ ne l'est pas

Deux notions d'apériodicité

- Le **stabilisateur** de $x \in A^G$ est $Stab(x) := \{g \in G \mid \sigma_g(x) = x\}$.
- Une configuration est **apériodique** si son stabilisateur est trivial.
- Un sous-décalage est **apériodique** si toutes ses configurations le sont.

Exemples :
$X_{\text{square free}}$ est apériodique ; $X_{\text{square free}^{\uparrow}}$ et $X_{\leq 1}$ ne le sont pas

Autre notion :

- L'**orbite** de $x \in A^G$ est $Orb(x) := \{\sigma_g(x) \mid g \in G\}$.
- Une configuration est **faiblement apériodique** si son orbite est infinie.
- Un sous-décalage est **faiblement apériodique** si toutes ses configurations le sont.

Exemples :
$X_{\text{square free}}$ et $X_{\text{square free}^{\uparrow}}$ sont faiblement apériodiques ; $X_{\leq 1}$ ne l'est pas

Fait (pour des groupes G infinis)

Si X est apériodique alors X est faiblement apériodique.

Une remarque sur l'apériodicité

La configuration $x \in \{0,1\}^G$ définie par

$$x_g = 1 \text{ ssi } g = 1_G$$

ne possède aucune période.

Mais $\overline{\mathcal{O}(x)} = X_{\leq 1}$ contient la configuration 0^G qui est périodique !

Une remarque sur l'apériodicité

La configuration $x \in \{0,1\}^G$ définie par

$$x_g = 1 \text{ ssi } g = 1_G$$

ne possède aucune période.

Mais $\overline{\mathcal{O}(x)} = X_{\leq 1}$ contient la configuration 0^G qui est périodique !

- Certes $\overline{\mathcal{O}(x)}$ n'est pas SFT...
- **Densifier** la construction
- Difficulté : **aucune** configuration ne possède de période

Sous-décalages et motifs

Un **motif** est une configuration finie $p \subset A^{Supp}$ dont $Supp \subset G$ est le **support**.

Un motif **apparaît** dans une configuration $x \in A^G$ s'il existe $g \in G$ tq

$$x_{g \cdot Supp} = p$$

Sous-décalages et motifs

Un **motif** est une configuration finie $p \subset A^{Supp}$ dont $Supp \subset G$ est le **support**.

Un motif **apparaît** dans une configuration $x \in A^G$ s'il existe $g \in G$ tq

$$x_{g \cdot Supp} = p$$

Un ensemble de motifs interdits F définit un sous-décalage :

$$X_F := \left\{ x \in A^G \mid \text{ aucun motif de } F \text{ n'apparaît dans } x \right\}.$$

Sous-décalages et motifs

Un **motif** est une configuration finie $p \subset A^{Supp}$ dont $Supp \subset G$ est le **support**.

Un motif **apparaît** dans une configuration $x \in A^G$ s'il existe $g \in G$ tq

$$x_{g \cdot Supp} = p$$

Un ensemble de motifs interdits F définit un sous-décalage :

$$X_F := \left\{ x \in A^G \mid \text{ aucun motif de } F \text{ n'apparaît dans } x \right\}.$$

Proposition

$X \subset A^G$ est un sous-décalage ssi il existe F un ensemble de motifs tq $X = X_F$.

Exemples :

- pour $X_{\text{square free}}$ on prend $F := \{ww \mid w \in A^*\}$;
- pour $X_{\text{square free}^\uparrow}$ on prend $F := \{ww \mid w \in A^*\} \times \{0\}$;
- pour $X_{\leq 1}$ on prend $F := \{10^n1 \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Sous-décalages de type fini

Un sous-décalage X est **de type fini (SFT)** s'il existe F fini tel que $X = X_F$.

Exemple : sur $\mathbb{Z}$ avec alphabet $\{0,1\}$: $X_{11,00} = \{(10)^{\mathbb{Z}}\} \cup \{(01)^{\mathbb{Z}}\}$

Sous-décalages de type fini

Un sous-décalage X est **de type fini (SFT)** s'il existe F fini tel que $X = X_F$.

Exemple : sur $\mathbb{Z}$ avec alphabet $\{0,1\}$: $X_{11,00} = \{(10)^{\mathbb{Z}}\} \cup \{(01)^{\mathbb{Z}}\}$

Contre-exemples : $X_{\text{square free}}$, $X_{\text{square free}^{\uparrow}}$ et $X_{\leq 1}$ ne sont pas SFT !

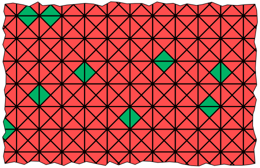
Principe pour montrer qu'un X n'est pas SFT :

- on suppose que X est SFT ;
- on peut supposer tous les motifs de F (fini) de même support ;
- à partir d'une configuration x de X, on construit x' qui évite F mais qui n'est pas dans X.

SFT plus proches voisins

On fixe S une partie génératrice de G (symétrique).
SFT **plus proches voisins** : motifs interdits avec support $\{1_G, s\}$, $s \in S$.

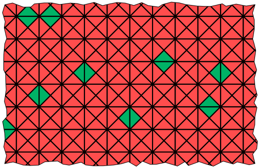
Exemple : Tuiles de Wang sur $\mathbb{Z}^2$



SFT plus proches voisins

On fixe S une partie génératrice de G (symétrique).
SFT **plus proches voisins** : motifs interdits avec support $\{1_G, s\}$, $s \in S$.

Exemple : Tuiles de Wang sur $\mathbb{Z}^2$



Proposition

- Tout SFT est conjugué à un SFT plus proches voisins.
- L'apériodicité est préservée par conjugaison.

$\Rightarrow$ on pourra penser en termes de SFT plus proches voisins uniquement.

Sur $\mathbb{Z}$ et les groupes libres $\mathbb{F}_n$, $n \geq 2$

Cas de $\mathbb{Z}$

SFT plus proches voisins $\approx$ ensemble de dominos δ

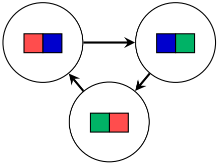
Règles locale

Cas de $\mathbb{Z}$

SFT plus proches voisins $\approx$ ensemble de dominos δ

Règles locale

Ensemble de dominos $\approx$ graphe orienté

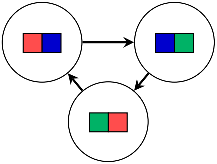


Cas de $\mathbb{Z}$

SFT plus proches voisins $\approx$ ensemble de dominos δ

Règles locale

Ensemble de dominos $\approx$ graphe orienté



Proposition

Il n'existe pas de SFT apériodique sur $\mathbb{Z}$.

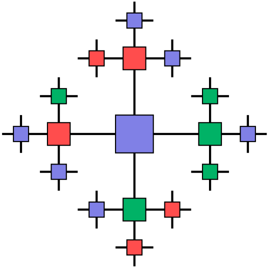
Apériodicité sur $\mathbb{F}_2$

Groupe libre $\mathbb{F}_2 = \langle a, b | \varnothing \rangle$.

Théorème (Piantadossi, 2006)

Tout SFT non vide sur $\mathbb{F}_2$ contient une configuration de stabilisateur non trivial.

Démonstration : Soit x une configuration du SFT.



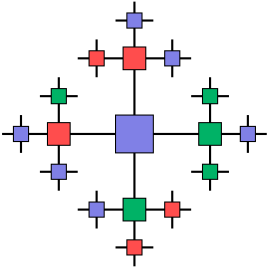
Apériodicité sur $\mathbb{F}_2$

Groupe libre $\mathbb{F}_2 = \langle a, b | \varnothing \rangle$.

Théorème (Piantadossi, 2006)

Tout SFT non vide sur $\mathbb{F}_2$ contient une configuration de stabilisateur non trivial.

Démonstration : Soit x une configuration du SFT.



$y = \ldots$  $\ldots$

On considère le sous-décalage sur $\mathbb{Z}$ $\pi_{\langle a \rangle}(X)$. Il est non vide, c'est un SFT donc il contient une configuration y de période $p \in \mathbb{N}^*$.

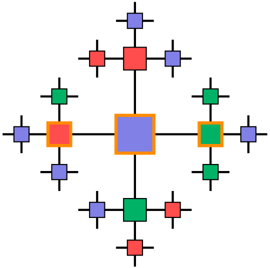
Apériodicité sur $\mathbb{F}_2$

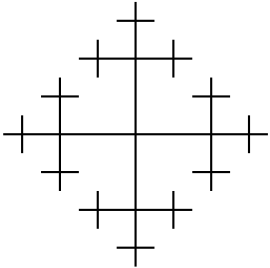
Groupe libre $\mathbb{F}_2 = \langle a, b | \varnothing \rangle$.

Théorème (Piantadossi, 2006)

Tout SFT non vide sur $\mathbb{F}_2$ contient une configuration de stabilisateur non trivial.

Démonstration : Soit x une configuration du SFT. On construit $x' \in X$ de période a^p.





$y = \ldots$  $\ldots$

On considère le sous-décalage sur $\mathbb{Z}$ $\pi_{\langle a \rangle}(X)$. Il est non vide, c'est un SFT donc il contient une configuration y de période $p \in \mathbb{N}^*$.

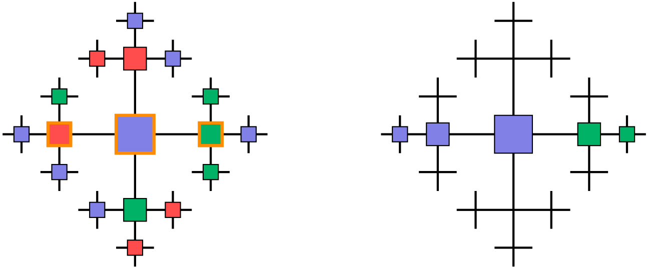
Apériodicité sur $\mathbb{F}_2$

Groupe libre $\mathbb{F}_2 = \langle a, b | \varnothing \rangle$.

Théorème (Piantadossi, 2006)

Tout SFT non vide sur $\mathbb{F}_2$ contient une configuration de stabilisateur non trivial.

Démonstration : Soit x une configuration du SFT. On construit $x' \in X$ de période a^p.



$y = \dots$  $\dots$

On considère le sous-décalage sur $\mathbb{Z}$ $\pi_{\langle a \rangle}(X)$. Il est non vide, c'est un SFT donc il contient une configuration y de période $p \in \mathbb{N}^*$.

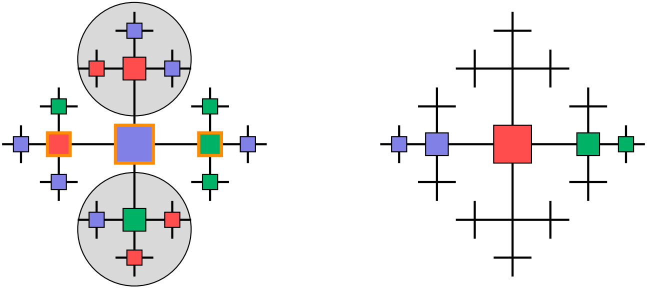
Apériodicité sur $\mathbb{F}_2$

Groupe libre $\mathbb{F}_2 = \langle a, b | \varnothing \rangle$.

Théorème (Piantadossi, 2006)

Tout SFT non vide sur $\mathbb{F}_2$ contient une configuration de stabilisateur non trivial.

Démonstration : Soit x une configuration du SFT. On construit $x' \in X$ de période a^p.



$y = \ldots$  $\ldots$

On considère le sous-décalage sur $\mathbb{Z}$ $\pi_{\langle a \rangle}(X)$. Il est non vide, c'est un SFT donc il contient une configuration y de période $p \in \mathbb{N}^*$.

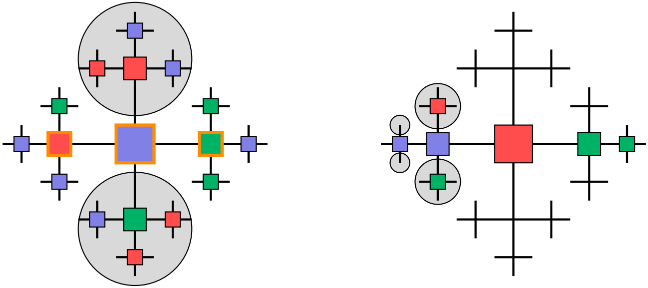
Apériodicité sur $\mathbb{F}_2$

Groupe libre $\mathbb{F}_2 = \langle a, b | \varnothing \rangle$.

Théorème (Piantadossi, 2006)

Tout SFT non vide sur $\mathbb{F}_2$ contient une configuration de stabilisateur non trivial.

Démonstration : Soit x une configuration du SFT. On construit $x' \in X$ de période a^p.



$y = \ldots$

$\ldots$

On considère le sous-décalage sur $\mathbb{Z}$ $\pi_{\langle a \rangle}(X)$. Il est non vide, c'est un SFT donc il contient une configuration y de période $p \in \mathbb{N}^*$.

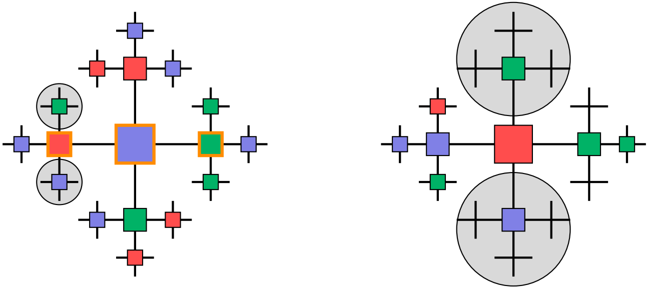
Apériodicité sur $\mathbb{F}_2$

Groupe libre $\mathbb{F}_2 = \langle a, b | \varnothing \rangle$.

Théorème (Piantadossi, 2006)

Tout SFT non vide sur $\mathbb{F}_2$ contient une configuration de stabilisateur non trivial.

Démonstration : Soit x une configuration du SFT. On construit $x' \in X$ de période a^p.



$y = \dots$  $\dots$

On considère le sous-décalage sur $\mathbb{Z}$ $\pi_{\langle a \rangle}(X)$. Il est non vide, c'est un SFT donc il contient une configuration y de période $p \in \mathbb{N}^*$.

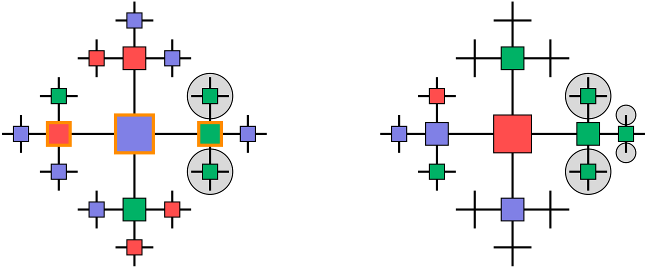
Apériodicité sur $\mathbb{F}_2$

Groupe libre $\mathbb{F}_2 = \langle a, b | \varnothing \rangle$.

Théorème (Piantadossi, 2006)

Tout SFT non vide sur $\mathbb{F}_2$ contient une configuration de stabilisateur non trivial.

Démonstration : Soit x une configuration du SFT. On construit $x' \in X$ de période a^p.



$y = \dots$  $\dots$

On considère le sous-décalage sur $\mathbb{Z}$ $\pi_{\langle a \rangle}(X)$. Il est non vide, c'est un SFT donc il contient une configuration y de période $p \in \mathbb{N}^*$.

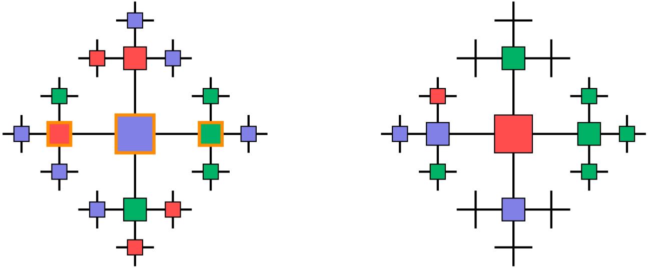
Apériodicité sur $\mathbb{F}_2$

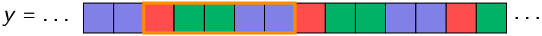
Groupe libre $\mathbb{F}_2 = \langle a, b | \varnothing \rangle$.

Théorème (Piantadossi, 2006)

Tout SFT non vide sur $\mathbb{F}_2$ contient une configuration de stabilisateur non trivial.

Démonstration : Soit x une configuration du SFT. On construit $x' \in X$ de période a^p.





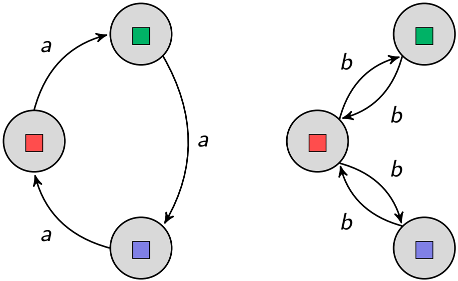
On considère le sous-décalage sur $\mathbb{Z}$ $\pi_{\langle a \rangle}(X)$. Il est non vide, c'est un SFT donc il contient une configuration y de période $p \in \mathbb{N}^*$.

Faible apériodicité sur $\mathbb{F}_2$

Théorème (Piantadossi, 2006)

Il existe un SFT faiblement apériodique sur $\mathbb{F}_2$.

Démonstration : On considère le SFT sur $\mathbb{F}_2$ défini par :



x d'orbite finie $\Rightarrow$ contradiction sur la fréquence des couleurs !

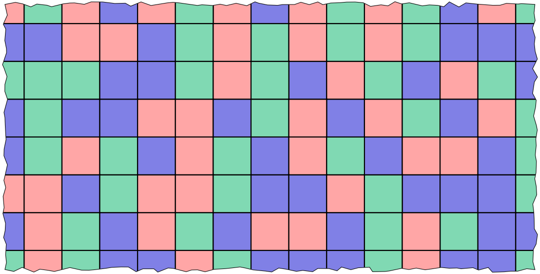
Sur $\mathbb{Z}^2$

Périodicité des SFT sur $\mathbb{Z}^2$

Proposition

Si un SFT X contient une configuration avec **une période**, alors X contient une configuration avec **deux périodes** linéairement indépendantes.

Démonstration : Soit x une configuration de période $\overrightarrow{u}$.

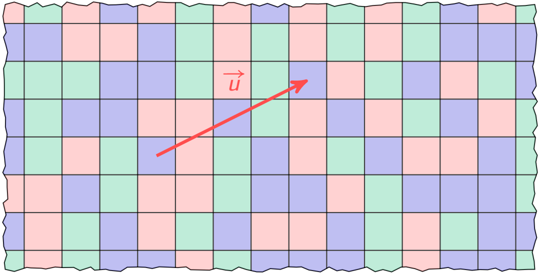


Périodicité des SFT sur $\mathbb{Z}^2$

Proposition

Si un SFT X contient une configuration avec **une période**, alors X contient une configuration avec **deux périodes** linéairement indépendantes.

Démonstration : Soit x une configuration de période $\overrightarrow{u}$.

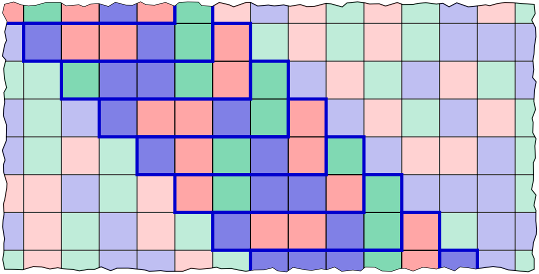


Périodicité des SFT sur $\mathbb{Z}^2$

Proposition

Si un SFT X contient une configuration avec **une période**, alors X contient une configuration avec **deux périodes** linéairement indépendantes.

Démonstration : Soit x une configuration de période $\overrightarrow{u}$.

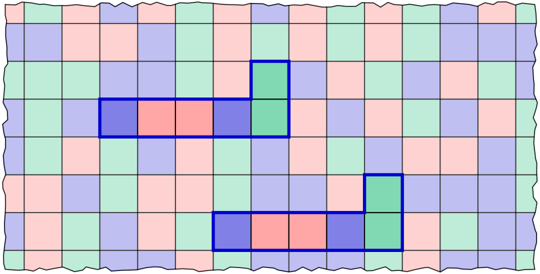


Périodicité des SFT sur $\mathbb{Z}^2$

Proposition

Si un SFT X contient une configuration avec **une période**, alors X contient une configuration avec **deux périodes** linéairement indépendantes.

Démonstration : Soit x une configuration de période $\overrightarrow{u}$.

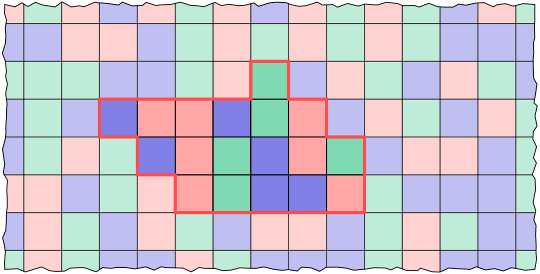


Périodicité des SFT sur $\mathbb{Z}^2$

Proposition

Si un SFT X contient une configuration avec **une période**, alors X contient une configuration avec **deux périodes** linéairement indépendantes.

Démonstration : Soit x une configuration de période $\overrightarrow{u}$.

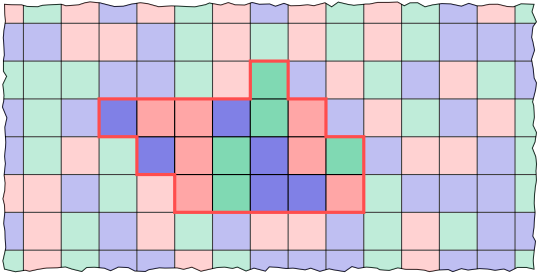


Périodicité des SFT sur $\mathbb{Z}^2$

Proposition

Si un SFT X contient une configuration avec **une période**, alors X contient une configuration avec **deux périodes** linéairement indépendantes.

Démonstration : Soit x une configuration de période $\overrightarrow{u}$.



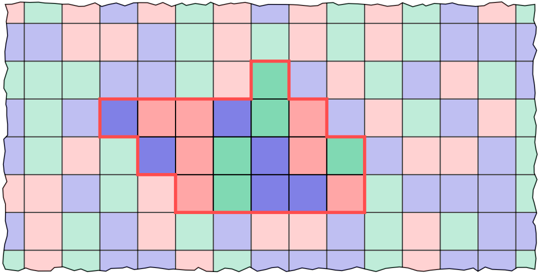
$\Rightarrow$ **pas de SFT** faiblement apériodique mais pas apériodique sur $\mathbb{Z}^2$!

Périodicité des SFT sur $\mathbb{Z}^2$

Proposition

Si un SFT X contient une configuration avec **une période**, alors X contient une configuration avec **deux périodes** linéairement indépendantes.

Démonstration : Soit x une configuration de période $\overrightarrow{u}$.



$\Rightarrow$ **pas de SFT** faiblement apériodique mais pas apériodique sur $\mathbb{Z}^2$!

Conjecture (Wang, 60's)

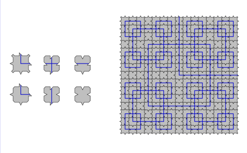
Il n'existe pas de SFT apériodique sur $\mathbb{Z}^2$.

SFT apériodiques sur $\mathbb{Z}^2$

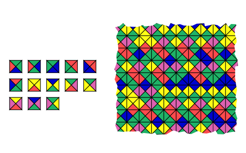
Théorème

Il existe des SFT apériodiques sur $\mathbb{Z}^2$.

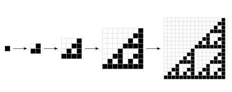
Structure hiérarchique (Robinson, 1966)



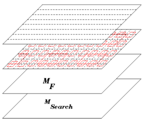
Orbites d'un système dynamique (Kari, 1996)



Sous-décalages substitutifs (Mozes, 1989)



Théorème de simulation (A. & Sablik, 2013)

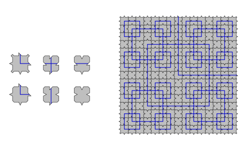


SFT apériodiques sur $\mathbb{Z}^2$

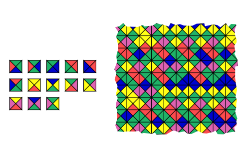
Théorème

Il existe des SFT apériodiques sur $\mathbb{Z}^2$.

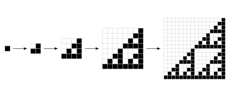
Structure hiérarchique (Robinson, 1966)



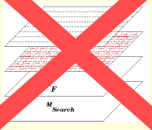
Orbites d'un système dynamique (Kari, 1996)



Sous-décalages substitutifs (Mozes, 1989)



~~**Théorème de simulation (A. & Sablik, 2013)**~~

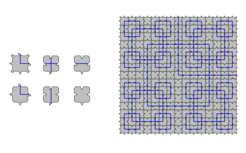


SFT apériodiques sur $\mathbb{Z}^2$

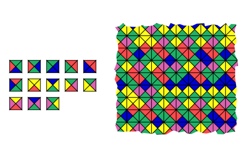
Théorème

Il existe des SFT apériodiques sur $\mathbb{Z}^2$.

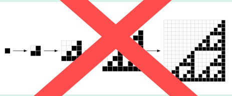
Structure hiérarchique (Robinson, 1966)



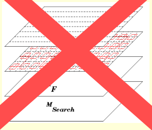
Orbites d'un système dynamique (Kari, 1996)



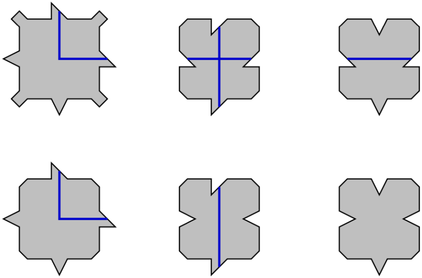
Sous- alages substitutifs (Moz 1989)



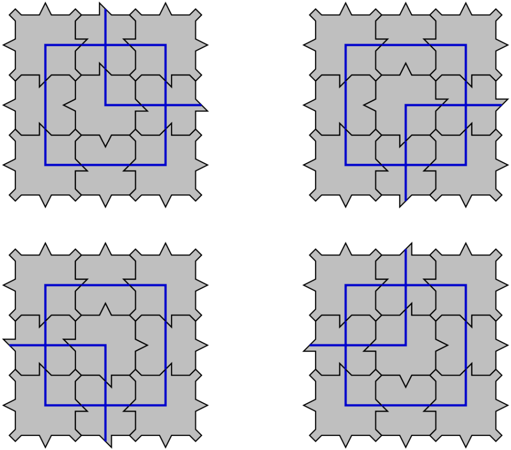
Théore de simulation (A. & Sa , 2013)



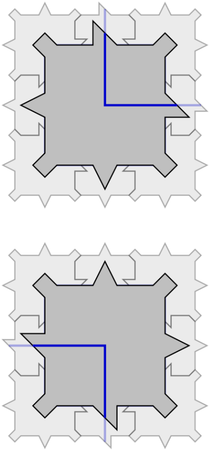
SFT de Robinson sur $\mathbb{Z}^2$



SFT de Robinson sur $\mathbb{Z}^2$

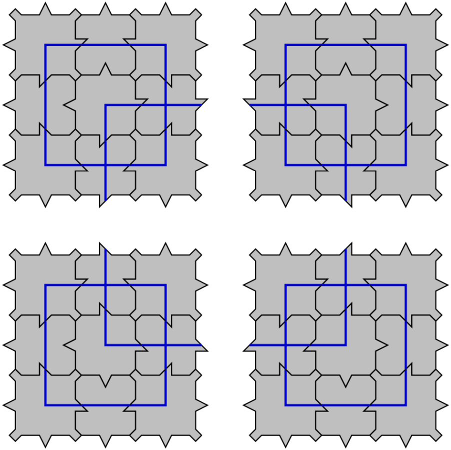


SFT de Robinson sur $\mathbb{Z}^2$

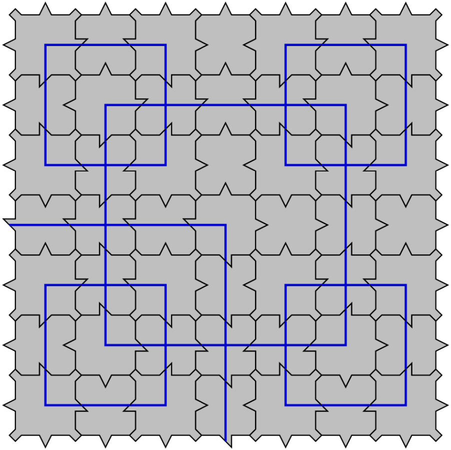


SFT de Robinson sur $\mathbb{Z}^2$

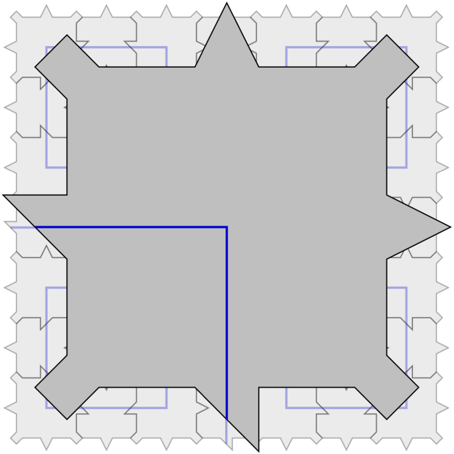
SFT de Robinson sur $\mathbb{Z}^2$



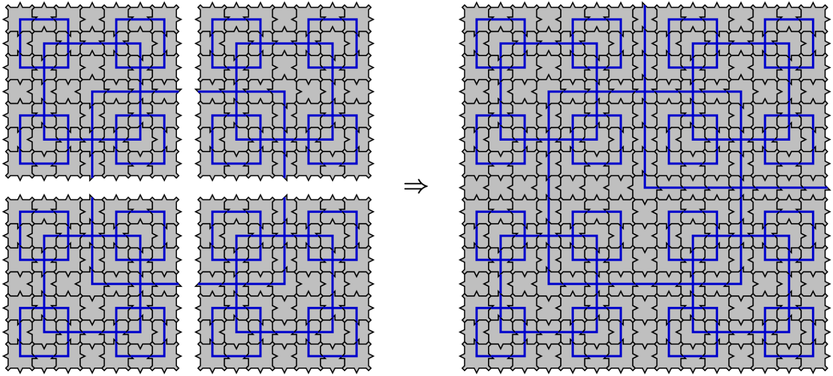
SFT de Robinson sur $\mathbb{Z}^2$



SFT de Robinson sur $\mathbb{Z}^2$

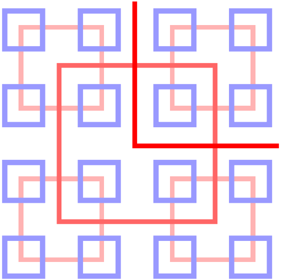


SFT de Robinson sur $\mathbb{Z}^2$



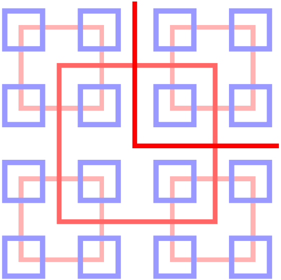
Sur la structure des configurations du Robinson

Hiérarchie de carrés : les carrés de niveau n sont regroupés par 4 pour former un carré de niveau $n+1$



Sur la structure des configurations du Robinson

Hiérarchie de carrés : les carrés de niveau n sont regroupés par 4 pour former un carré de niveau $n+1$



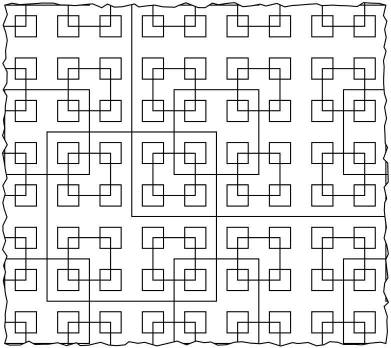
Proposition

Le SFT de Robinson possède une infinité non dénombrable de configurations.

Apériodicité

Théorème

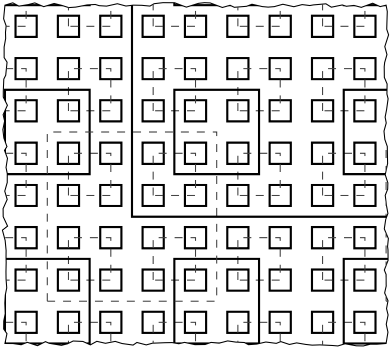
Le SFT de Robinson est apériodique.



Apériodicité

Théorème

Le SFT de Robinson est apériodique.

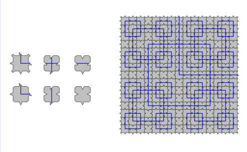


SFT apériodiques sur $\mathbb{Z}^2$

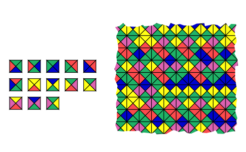
Théorème

Il existe des SFT apériodiques sur $\mathbb{Z}^2$.

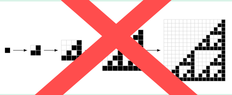
Structure hiérarchique (Robinson, 1966)



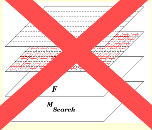
Orbites d'un système dynamique (Kari, 1996)



~~**Sous- alages substitutifs (Moz 1989)**~~



~~**Théore de simulation (A. & Sa , 2013)**~~

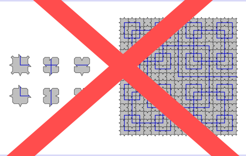


SFT apériodiques sur $\mathbb{Z}^2$

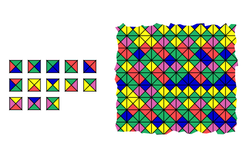
Théorème

Il existe des SFT apériodiques sur $\mathbb{Z}^2$.

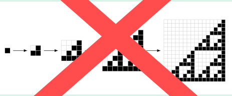
Struc e hiérarchique (Robinso 1966)



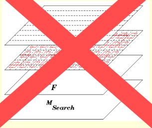
Orbites d'un système dynamique (Kari, 1996)



Sous- alages substitutifs (Moz 1989)



Théore de simulation (A. & Sa , 2013)



Construction de Kari sur $\mathbb{Z}^2$

Principe de la construction

Encoder un **système dynamique apériodique** T simple dans un SFT sur $\mathbb{Z}^2$.

(ici apériodique = $T^n(x) = x \Rightarrow n = 1$)

Principe de la construction

Encoder un **système dynamique apériodique** T simple dans un SFT sur $\mathbb{Z}^2$.

(ici apériodique = $T^n(x) = x \Rightarrow n = 1$)

Les configurations du SFT sont les orbites de T :

$$T^{-3}(x)$$

$$T^{-2}(x)$$

$$T^{-1}(x)$$

$$x$$

$$T(x)$$

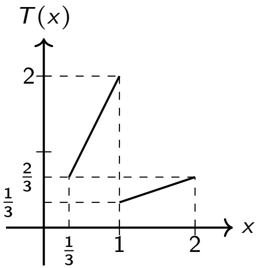
$$T^2(x)$$

$$T^3(x)$$

Fonction rationelle linéaire par morceaux T

On choisit $T : [\frac{1}{3}; 2] \to [\frac{1}{3}; 2]$ la fonction linéaire par morceaux définie par :

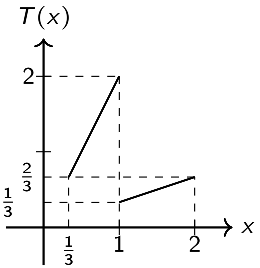
$$T : x \mapsto \begin{cases} 2x \text{ si } x \in [\frac{1}{3}; 1] \\ \frac{1}{3}x \text{ si } x \in]1; 2] \end{cases}$$



Fonction rationelle linéaire par morceaux T

On choisit $T : [\frac{1}{3}; 2] \to [\frac{1}{3}; 2]$ la fonction linéaire par morceaux définie par :

$$T : x \mapsto \begin{cases} 2x \text{ si } x \in [\frac{1}{3}; 1] \\ \frac{1}{3}x \text{ si } x \in]1; 2] \end{cases}$$



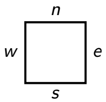
Proposition

Le système dynamique T est apériodique.

Fonction linéaires et tuiles de Wang (I)

On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction rationnelle linéaire par morceau (par exemple T).

On dit que la tuile



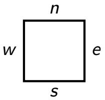
calcule la fonction f si

$$f(n) + w = s + e.$$

Fonction linéaires et tuiles de Wang (I)

On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction rationnelle linéaire par morceau (par exemple T).

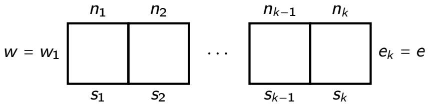
On dit que la tuile



calcule la fonction f si

$$f(n) + w = s + e.$$

Sur une ligne :

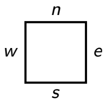


$$f\left(\frac{n_1 + \cdots + n_k}{k}\right) + \frac{1}{k} w = \frac{s_1 + \cdots + s_k}{k} + \frac{1}{k} e$$

Fonction linéaires et tuiles de Wang (I)

On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction rationnelle linéaire par morceau (par exemple T).

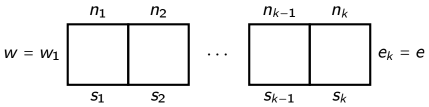
On dit que la tuile



calcule la fonction f si

$$f(n) + w = s + e.$$

Sur une ligne :



$$f\left(\frac{n_1 + \cdots + n_k}{k}\right) + \frac{1}{k} w = \frac{s_1 + \cdots + s_k}{k} + \frac{1}{k} e$$

et quand $k \to \infty$

$$f\left(\lim_{k\to\infty} \frac{n_1 + \cdots + n_k}{k}\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{s_1 + \cdots + s_k}{k}$$

Fonction linéaires et tuiles de Wang (II)

Si $x \in \mathbb{R}$, une **représentation of x** est une suite d'entiers $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ telle que

- $\forall k \in \mathbb{Z}, x_k \in \{\lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1\}$;
- $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{k-n} + \cdots + x_{k+n}}{2n+1} = x.$$

Fonction linéaires et tuiles de Wang (II)

Si $x \in \mathbb{R}$, une **représentation of x** est une suite d'entiers $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ telle que

- $\forall k \in \mathbb{Z}, x_k \in \{\lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1\}$;
- $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{k-n} + \cdots + x_{k+n}}{2n+1} = x.$$

On définit $B_k(x) = \lfloor kx \rfloor - \lfloor (k-1)x \rfloor$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Alors

$$B(x) = (B_k(x))_{k\in\mathbb{Z}}$$

est la **représentation équilibrée** de x.

Fonction linéaires et tuiles de Wang (II)

Si $x \in \mathbb{R}$, une **représentation of x** est une suite d'entiers $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ telle que

- $\forall k \in \mathbb{Z}, x_k \in \{\lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1\}$;
- $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{k-n} + \cdots + x_{k+n}}{2n+1} = x.$$

On définit $B_k(x) = \lfloor kx \rfloor - \lfloor (k-1)x \rfloor$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Alors

$$B(x) = (B_k(x))_{k\in\mathbb{Z}}$$

est la **représentation équilibrée** de x.

Si x est dans $[n, n+1]$, alors $B_k(x) \in \{n, n+1\}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Fonction linéaires et tuiles de Wang (III)

Rappel : $B_k(x) = \lfloor kx \rfloor - \lfloor (k-1)x \rfloor$. On note $A_k(x) = \lfloor kx \rfloor$.

On a un nombre fini de $f_i : I_i \to \mathbb{R}$, avec I_i intervalles aux bornes rationnelles.

Les tuiles de Wang correspondant à $f_i(x) = q \cdot x$ est formé des tuiles

$$\begin{array}{ccc} & B_k(x) & \\ f_i(A_{k-1}(x)) - A_{k-1}(f_i(x)) & \boxed{} & f_i(A_k(x)) - A_k(f_i(x)) \\ & B_k(f_i(x)) & \end{array}$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $x \in I_i$.

Fonction linéaires et tuiles de Wang (III)

Rappel : $B_k(x) = \lfloor kx \rfloor - \lfloor (k-1)x \rfloor$. On note $A_k(x) = \lfloor kx \rfloor$.

On a un nombre fini de $f_i : I_i \to \mathbb{R}$, avec I_i intervalles aux bornes rationnelles.

Les tuiles de Wang correspondant à $f_i(x) = q \cdot x$ est formé des tuiles

$$\begin{array}{ccc} & B_k(x) & \\ f_i(A_{k-1}(x)) - A_{k-1}(f_i(x)) & \boxed{} & f_i(A_k(x)) - A_k(f_i(x)) \\ & B_k(f_i(x)) & \end{array}$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $x \in I_i$.

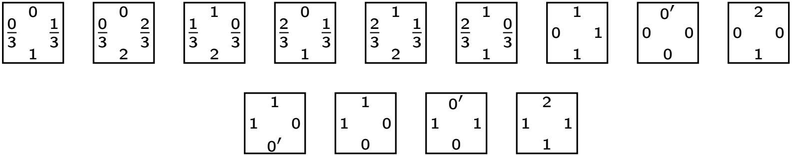
Comme I_i est borné et f_i rationnelle, un **nombre fini** de tuiles suffisent !

Fonction linéaires et tuiles de Wang (III)

- Un système de fonctions linéaires rationnelles $f_1, f_2, \ldots, f_n$ definies sur $I_1, I_2, \ldots, I_n$.
- Chaque $f_i \rightsquigarrow$ jeu de tuiles fini τ_i
- Ensemble de tuiles $\tau = \cup \tau_i$ avec un marquage supplémentaire (chaque ligne est pavée avec un seul τ_i)
- τ admet un pavage ssi $f_1, f_2, \ldots, f_n$ possède un point immortel (orbite infinie).

Jeu de tuiles de Kari-Culik

En appliquant le procédé de fabrication précédent à T, on obtient ces 13 tuiles :



Théorème (Kari-Culik, 1996)

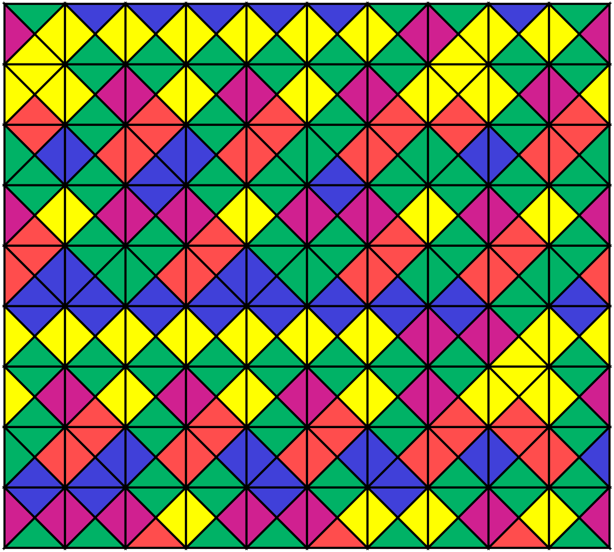
Le SFT de Kari-Culik est apériodique.

- pas de période horizontale possible (cause de l'apériodicité de T) ;
- $\Rightarrow$ pas d'autre période possible.

Exemple de configuration du Kari-Culik

1 1 0 $0'$	2 0 0 1	2 0 0 1	2 0 0 1	2 0 0 1	2 0 0 1	1 0 1 1	1 1 0 $0'$	2 0 0 1	1 0 1 1
$0'$ 0 0 0	1 0 1 1	1 1 0 0	1 0 1 1	1 1 0 0	1 0 1 1	1 1 0 0	$0'$ 0 0 0	1 0 1 1	1 1 0 0
0 $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ 1	1 $\frac{2}{3}$ $\frac{0}{3}$ 1	0 $\frac{0}{3}$ $\frac{2}{3}$ 2	1 $\frac{2}{3}$ $\frac{0}{3}$ 1	0 $\frac{0}{3}$ $\frac{1}{3}$ 1	1 $\frac{1}{3}$ $\frac{0}{3}$ 2	0 $\frac{0}{3}$ $\frac{1}{3}$ 1	0 $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ 1	1 $\frac{2}{3}$ $\frac{0}{3}$ 1	0 $\frac{0}{3}$ $\frac{1}{3}$ 1
1 1 0 0	1 0 1 1	2 1 1 1	1 1 0 0	1 0 1 1	2 1 1 1	1 1 0 0	1 0 1 1	1 1 0 0	1 0 1 1
0 $\frac{0}{3}$ $\frac{2}{3}$ 2	1 $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{3}$ 2	1 $\frac{1}{3}$ $\frac{0}{3}$ 2	0 $\frac{0}{3}$ $\frac{2}{3}$ 2	1 $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{3}$ 2	1 $\frac{1}{3}$ $\frac{0}{3}$ 2	0 $\frac{0}{3}$ $\frac{1}{3}$ 2	1 $\frac{1}{3}$ $\frac{0}{3}$ 2	0 $\frac{0}{3}$ $\frac{1}{3}$ 1	1 $\frac{1}{3}$ $\frac{0}{3}$ 2
2 0 0 1	2 0 0 1	2 0 0 1	2 0 0 1	2 0 0 1	2 0 0 1	2 0 1 1	2 1 1 1	1 1 0 $0'$	2 0 0 1
1 0 1 1	1 1 0 0	1 0 1 1	1 1 0 0	1 0 1 1	1 1 0 0	1 0 1 1	1 1 0 0	$0'$ 0 0 0	1 0 1 1
1 $\frac{1}{3}$ $\frac{0}{3}$ 2	0 $\frac{0}{3}$ $\frac{2}{3}$ 2	1 $\frac{2}{3}$ $\frac{0}{3}$ 1	0 $\frac{0}{3}$ $\frac{2}{3}$ 1	1 $\frac{2}{3}$ $\frac{0}{3}$ 2	0 $\frac{0}{3}$ $\frac{2}{3}$ 1	1 $\frac{2}{3}$ $\frac{0}{3}$ 2	0 $\frac{0}{3}$ $\frac{2}{3}$ 1	0 $\frac{2}{3}$ $\frac{0}{3}$ 1	1 $\frac{0}{3}$ $\frac{2}{3}$ 1
2 1 1 1	2 1 1 1	1 1 0 0	1 0 1 1	2 1 1 1	1 1 0 0	2 0 0 1	1 0 1 1	1 1 0 0	1 0 1 1

Exemple de configuration du Kari-Culik

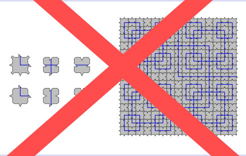


SFT apériodiques sur $\mathbb{Z}^2$

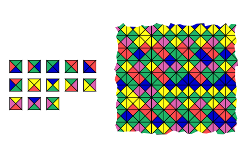
Théorème

Il existe des SFT apériodiques sur $\mathbb{Z}^2$.

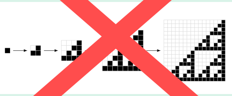
Struc e hiérarchique (Robinso 1966)



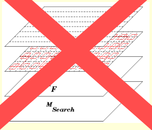
Orbites d'un système dynamique (Kari, 1996)



Sous- alages substitutifs (Moz 1989)



Théore de simulation (A. & Sa , 2013)



Etat de l’art sur des groupes de type fini

Propriétés générales

- Si $H \leq G$ **d'indice fini** et H a un SFT apériodique, alors G aussi.
- Si G et H sont de **présentation finie** et **quasi-isométriques**, alors G a un SFT apériodique ssi H a un SFT apériodique (Cohen 2017).

Propriétés générales

- Si $H \leq G$ **d'indice fini** et H a un SFT apériodique, alors G aussi.
- Si G et H sont de **présentation finie** et **quasi-isométriques**, alors G a un SFT apériodique ssi H a un SFT apériodique (Cohen 2017).

Obstructions :

- Si G a **au moins deux bouts** alors il n'a pas de SFT fortement apériodique (Cohen, 2017).
- Si G a **problème du mot indécidable** alors il n'a pas de SFT fortement apériodique (Jeandel, 2015).

Propriétés générales

- Si $H \leq G$ **d'indice fini** et H a un SFT apériodique, alors G aussi.
- Si G et H sont de **présentation finie** et **quasi-isométriques**, alors G a un SFT apériodique ssi H a un SFT apériodique (Cohen 2017).

Obstructions :

- Si G a **au moins deux bouts** alors il n'a pas de SFT fortement apériodique (Cohen, 2017).
- Si G a **problème du mot indécidable** alors il n'a pas de SFT fortement apériodique (Jeandel, 2015).

Conjecture (Jeandel + Cohen)

Un groupe de type fini G admet un SFT apériodique
$$\Leftrightarrow$$
G a un bout et problème du mot décidable.

Résultats connus

Question

Quels groupes admettent des SFT apériodiques ?

Résultats connus

Question

Quels groupes admettent des SFT apériodiques ?

- $\mathbb{Z}^n$ pour $n \geq 2$ (Berger, 1966, Kari 1996)
- certains groupes $G \times \mathbb{Z}$ (Jeandel, 2015).
- groupe d'**Heisenberg** (Sahin, Schraudner & Ugarcovici, 2015).
- groupes de **surface** (Cohen & Goodman-Strauss, 2015).
- Groupes $\mathbb{Z}^2 \rtimes H$ où le **WP** de H est décidable (Barbieri & Sablik, 2019).
- groupes **hyperboliques** avec au plus un bout (Cohen, Goodman-Strauss & Rieck, 2022).
- $G \times H \times K$ avec **WP** décidable (Barbieri, 2019).
- groupes **auto-simulables** avec WP décidable (Barbieri, Sablik & Salo, 2021).
- groupes de **Baumslag-Solitar moyennables** (Esnay & Moutot 2022, A. & Kari 2013, A. & Schraudner, 2024).
- groupes de **Baumslag-Solitar généralisés** (A., Bitar & Huriot, 2023).
- le ***Lamplighter*** (Bartholdi & Salo, 2024).

Conclusion

Aujourd'hui :

- construction de SFT apériodiques : compliqué...
- techniques souvent inspirées du cas $\mathbb{Z}^2$ (voire du plan hyperbolique)

Conclusion

Aujourd'hui :

- construction de SFT apériodiques : compliqué...
- techniques souvent inspirées du cas $\mathbb{Z}^2$ (voire du plan hyperbolique)

Demain : sur les Baumslag-Solitar généralisés (merci Yves et Sasha ;-))

- cas de $BS(1,2)$ *à la Kari* ;
- cas de $\mathbb{F} \times \mathbb{Z}$ en *pliant/déployant* des SFT sur $\mathbb{Z}^2$;
- cas de $BS(2,3)$ *à la Kari* aussi, mais encore mieux.

Conclusion

Aujourd'hui :

- construction de SFT apériodiques : compliqué. . .
- techniques souvent inspirées du cas $\mathbb{Z}^2$ (voire du plan hyperbolique)

Demain : sur les Baumslag-Solitar généralisés (merci Yves et Sasha ;-))

- cas de $BS(1,2)$ *à la Kari* ;
- cas de $\mathbb{F} \times \mathbb{Z}$ en *pliant/déployant* des SFT sur $\mathbb{Z}^2$;
- cas de $BS(2,3)$ *à la Kari* aussi, mais encore mieux.

Merci :-)